

Calcul statique des portiques par la RDM

Un portique bidimensionnel est constitué d'éléments poutres qui travaillent en *traction & flexion*.

Un portique tridimensionnel est constitué d'éléments poutres qui travaillent en *traction - torsion & dans les deux plans principaux de flexion*.

L'objectif de ce chapitre est de vous initier au calcul analytique de la réponse statique d'un portique bidimensionnel. Ces calculs permettent, pour des structures simples, d'obtenir analytiquement les diagrammes des efforts internes qui permettent de vérifier que la structure reste dans le domaine élastique, et qu'il n'y a pas d'instabilité (étude du flambement). Utiles pour le pré dimensionnement, savoir effectuer ces calculs analytiques permet d'assimiler l'utilisation des outils numériques.

Pour les portiques plus complexes (géométrie, forte hyperstaticité, ou cas de chargement multiples) ou pour les études dynamiques, la méthode des éléments finis présentée dans le chapitre suivant, permettra d'effectuer les calculs numériques.

Dans ce chapitre nous ne traitons que des problèmes statiques

Rappel : théorèmes énergétiques de la RDM

Comme pour l'étude des treillis nous utiliserons les trois théorèmes énergétiques de la statique.

Théorème de Maxwell - Betty $W(1 \rightarrow 2) = W(2 \rightarrow 1)$

Le travail d'un système de force F_1 dans le déplacement produit par un système de force F_2 est égal au travail du système de force F_2 dans le déplacement produit par le système de force F_1 .

Théorème de Castigliano. $\left[\frac{\partial E_d(F, X)}{\partial X} \right]_{X=0} = \delta_x$

La dérivée partielle de l'énergie de déformation de la structure par rapport à un effort est égale au déplacement du point d'application selon la ligne d'action de cet effort.

Théorème de Ménabréa. $\forall i \in [1, N] \quad \frac{\partial E_d(F, X_i)}{\partial X_i} = 0$

Pour une structure hyperstatique de degré N , les N inconnues hyperstatiques X_i minimisent l'énergie de déformation élastique de la structure.

Hyperstaticité

La première question à se poser lorsque l'on aborde le calcul statique d'une structure est celle de l'**hyperstaticité de la structure**.

Dans un premier temps il faut considérer l'**hyperstaticité "extérieure : h_e "** c'est à dire l'ensemble des liaisons cinématiques qui bloquent les mouvements d'ensemble de la structure. Pour effectuer un calcul statique ce degré d'hyperstaticité extérieure sera positif ou nul (sinon il faut éliminer les mouvements d'ensemble).

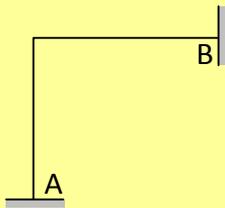
Le degré d'hyperstaticité d'un portique plan sera obtenu en calculant **$h_e + h_i - m_i$**

avec **h_i hyperstaticité intérieure (3 fois le nombre de boucles fermées d'éléments)**

m_i nombre de mobilité des liaisons intérieures (0, 1 ou 2)

Exemples

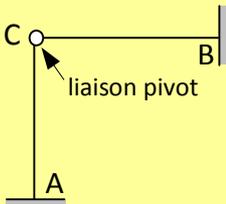
Objectif : Déterminer le degré d'hyperstatisme de ces portiques.



Ce portique est hyperstatique extérieur de degré 3

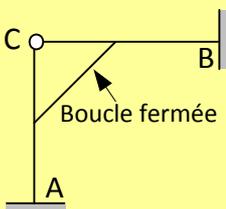
6 inconnues de liaison pour 3 équations d'équilibre

$$\{T_A\}_{0 \rightarrow S} = \{X_A \quad Y_A \quad M_A\} \text{ et } \{T_B\}_{0 \rightarrow S} = \{X_B \quad Y_B \quad M_B\}$$



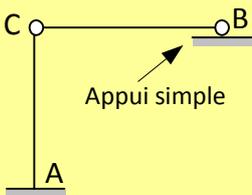
La liaison pivot en C libère une mobilité, Le moment de flexion pour les deux éléments du portique sera nul en C.

Le portique est hyperstatique de degré 2



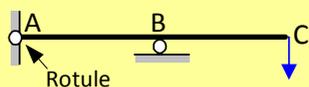
La boucle fermée ajoute 3 inconnues hyperstatiques intérieures, ce portique est donc hyperstatique de degré 5.

Ne calculez pas ce type de structure à la main, utilisez la MEF



L'appui simple en B possède deux mobilités donc une seule inconnue de liaison, ce portique est hyperstatique extérieur de degré 1, comme nous libérons une mobilité intérieure, ce portique est isostatique.

Le calcul, à la main, de cette structure est simple.



Structure isostatique (3 inconnues : 2 en A et 1 en B), pour ce type de structure il est simple d'obtenir la solution analytique directement par la RDM.

Calcul du torseur des efforts de cohésion

Si la structure est isostatique, il est possible d'exprimer le torseur des efforts de cohésion en tout point (sur tous les éléments de la structure) en fonction de la géométrie et du chargement. Et c'est la première chose à faire, car connaissant les efforts intérieurs il est possible de dimensionner la structure.

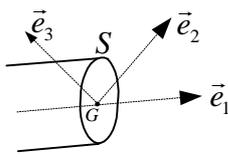
Si la structure est hyperstatique de degré n il faudra utiliser n inconnues hyperstatiques pour exprimer les efforts intérieurs puis calculer l'énergie de déformation en fonction de ces efforts pour pouvoir appliquer le Théorème de Ménabréa. Nous présenterons d'autres outils applicables sur les cas simples hyperstatiques mais ce qu'il faut retenir c'est que

Si une structure est hyperstatique:

- **Le torseur des efforts intérieur dépend de n inconnues hyperstatiques**
- **La répartition des efforts intérieurs est fonction des matériaux (elle dépend des déformations)**

Dans le chapitre de modélisation nous avons présentés le modèle de St Venant - Bernoulli, nous rappelons ici les résultats obtenus avec les conventions de la MMC (normale orientée vers l'extérieur du milieu considéré)

Modèle poutre



G est le centre de surface, ils définissent la ligne moyenne de la poutre
 La direction \vec{e}_1 est la normale extérieure de la section considérée.
 Les directions (\vec{e}_2, \vec{e}_3) sont les directions principales de la section
 Tous les vecteurs sont exprimés sur la base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

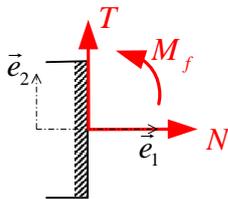
Le torseur des efforts de cohésions est défini par sa résultante et son moment : $\vec{R} = \begin{Bmatrix} N \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$ $\vec{M}_{(G)} = \begin{Bmatrix} M_t \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{Bmatrix}$

Les notations des Eurocodes sont $\{N \ V_1 \ V_2\}$ et $\{M_1 \ M_2 \ M_3\}$

Les lois de comportement intégrées s'écrivent respectivement :

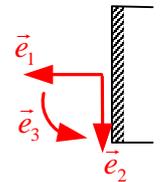
	variables	Lois de comportement
Traction	u	$N = ES \ u_{,x}$
Torsion	θ_x	$M_t = GJ \ \theta_{,x}$ avec $G = E/2(1+\nu)$
Flexion (\vec{e}_1, \vec{e}_2)	$v, \theta_z = v_{,x}$	$M_3 = EI_3 \ v_{,xx}$ et $T_2 = -M_{3,x}$
Flexion (\vec{e}_1, \vec{e}_3)	$w, \theta_y = -w_{,x}$	$M_2 = -EI_2 \ w_{,xx}$ et $T_3 = M_{2,x}$

En pratique pour les calculs à la main, nous traiterons quasiment que des problèmes plans pour lesquels une figure en deux dimensions suffit. De plus pour simplifier nous nous placerons systématiquement dans le plan (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .



La base $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est **orthonormée directe**

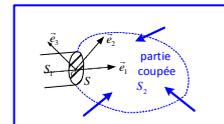
Pour une facette quelconque c'est l'orientation de la normale extérieure qui définit l'orientation de cette base



Ces conventions étant rappelées, le torseur des efforts sur une facette quelconque peut se calculer de trois façons équivalentes du point de vue théorique, mais différentes dans la pratique et la "facilité" des calculs.

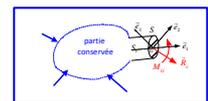
- on exprime le torseur de toutes les actions extérieures exercées par le reste de la structure sur la facette considérée (on utilise la formule de transport des torseurs)

$$\vec{M}(G) = \sum_P (\vec{M}(P) + \vec{R}_P \wedge \overline{PG}) \quad \text{et} \quad \vec{R}_G = \sum_P \vec{R}_P$$



- on exprime l'équilibre de la partie de structure que l'on a conservée, ce qui permet d'exprimer le torseur des efforts de cohésion en fonction des actions sur cette partie de la structure.

$$\vec{M}(G) + \sum_{P \in S1} (\vec{M}(P) + \vec{R}_P \wedge \overline{PG}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{R}_G + \sum_{P \in S1} \vec{R}_P = \vec{0}$$

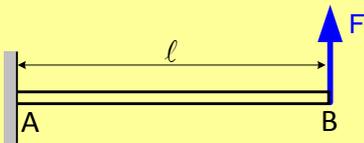


- on exprime l'équilibre de la partie de la structure que l'on a coupée, ce qui donne par le théorème de l'action réaction la valeur algébrique du torseur des actions de cohésion sur notre facette (il faut changer le signe de la normale).

$$-\vec{M}(G) + \sum_{P \in S2} (\vec{M}(P) + \vec{R}_P \wedge \overline{PG}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad -\vec{R}_G + \sum_{P \in S2} \vec{R}_P = \vec{0}$$

Selon la géométrie et le chargement du problème une des options peut s'avérer beaucoup plus simple d'écriture, il faut donc faire un choix réfléchi avant de se lancer dans les calculs.

Exemple : la poutre console



C'est l'exemple le plus simple que l'on puisse traiter, il permet de comprendre le principe de calcul du torseur des efforts de cohésion sur une section droite de la poutre.

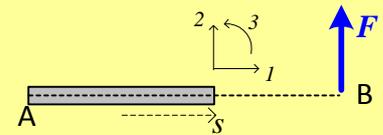
Objectifs : Comparer les méthodes mises en oeuvre.

Cette structure est isostatique, 3 inconnues de liaison $\{T_A\}_{0 \rightarrow S} = \{X_A \ Y_A \ M_A\}$ pour 3 équations d'équilibre par le PFD, nous pouvons donc calculer les efforts en A.

Si l'objectif est d'obtenir les diagrammes des efforts intérieurs il n'est pas nécessaire de passer par ce calcul en effet :

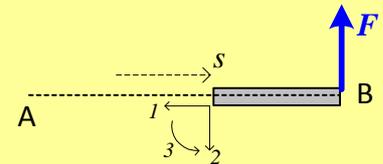
a- Effectuons une coupe à l'abscisse s le torseur en G des actions extérieures à l'élément de poutre considéré se réduit à

$$\text{Sur } [A, B] \quad \forall s \in [0, \ell] \quad \begin{cases} N_{(s)} = 0 \\ T_{(s)} = F \\ M_{f(s)} = F(\ell - s) \end{cases}$$



b- Écrivons les équations d'équilibre de la partie coupée

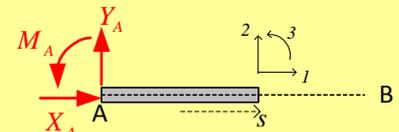
$$\forall s \in [0, \ell] \quad \begin{cases} -N_{(s)} + 0 = 0 \\ -T_{(s)} + F = 0 \\ -M_{f(s)} + F(\ell - s) = 0 \end{cases}$$



Nous retrouvons les mêmes résultats. **Mais attention aux signes**, la normale à la facette de la partie considérée est $-\vec{e}_1$

c- Écrivons maintenant l'équilibre de la partie conservée

$$\forall s \in [0, \ell] \quad \begin{cases} N_{(s)} + X_A = 0 \\ T_{(s)} + Y_A = 0 \\ M_{f(s)} + M_A - Y_A s = 0 \end{cases}$$



Il faut avoir préalablement calculé le torseur des efforts de liaison en utilisant les équations d'équilibre de la structure complète.

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + F = 0 \\ M_A + F\ell = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = -F \\ M_A = -F\ell \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} N_{(s)} = 0 \\ T_{(s)} = F \\ M_{f(s)} = F(\ell - s) \end{cases}$$

On retrouve les mêmes résultats

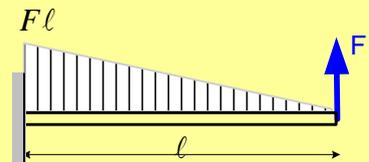
Cette dernière méthode est ici la plus longue

Dans tous les cas nous avons obtenu le diagramme du moment de flexion sur la poutre

La contrainte est maximale à l'encastement :

$$(\sigma_{xx})_{Max} = \frac{F\ell}{I} y_{Max} = \frac{F\ell}{W}$$

Le module élastique W est fonction de la géométrie de la section.



Pour calculer la flèche nous devons intégrer l'équation différentielle : $M_f = EI v_{,x^2}$ en utilisant les conditions aux limites qui sont : $v_{(0,t)} = 0$ et $v_{,x(0,t)} = 0$

$$\text{On trouve } v_{(x)} = \frac{F\ell}{2EI} x^2 \left(1 - \frac{x}{3\ell}\right) \quad \text{soit} \quad v_{Max} = v_{(\ell)} = \frac{F\ell^3}{3EI}$$

Nous aurions pu appliquer le théorème de Castigliano $v_B = \frac{\partial E_d}{\partial F}$ avec $2E_d = \int_0^{\ell} \frac{F^2(\ell-s)^2}{EI} ds$

On retrouve de façon très rapide $v_B = \frac{F\ell^3}{3EI}$

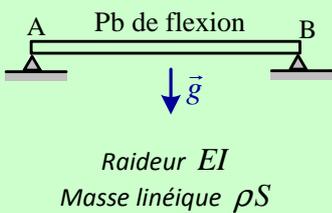
Remarques : On vérifie bien $T(s) = -M_{f,s}$, et en A : $\begin{cases} X_A = -N(0) \\ Y_A = -T(0) \\ M_A = -M_f(0) \end{cases}$

le signe "-" vous l'avez compris vient de l'orientation de la normale

L'exemple précédent nous à permis de voir les différentes options de calcul du moment de flexion exercée sur une section d'une poutre. Dans l'exercice suivant le calcul est un peu plus complexe puisque nous avons une charge répartie. L'intérêt de l'exercice est aussi de faire le lien avec l'approche mathématique qui consiste à intégrer l'équation différentielle des mouvements. Approche difficilement applicable à des structures plus complexes.

Exercice 11 : Étude d'une poutre sous son poids propre

- Objectifs : *Établir le système "EDP" du problème.*
Faire le lien avec l'approche "RDM"
Calcul de la contrainte axiale maximale (dimensionnement).



1. Écrire le système "EDP" de ce problème
2. Calculer la déformée "flèche" de la poutre
En déduire la valeur au centre
3. Tracer le diagramme du moment de flexion
Retrouver ce résultat par une analyse directe "RDM"

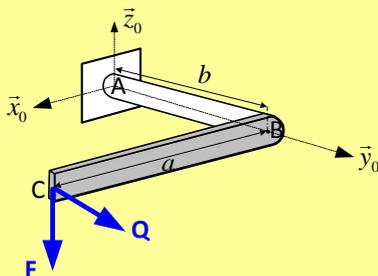
Statique des portiques isostatiques

Pour un portique isostatique la démarche à suivre est celle que nous venons de présenter, il faut juste adapter son analyse à la géométrie et aux efforts exercés sur la structure, ce sont des calculs de géométrie sur les torseurs équivalents.

Une méthode consiste à choisir son sens de parcours de la structure, ce qui permet de définir la base locale (1,2,3) sur chaque élément du portique. Il reste à exprimer sur cette base locale le torseur des efforts agissant sur la section considérée, ce qui donne les valeurs de $\{N \ V_1 \ V_2\}$ et $\{M_1 \ M_2 \ M_3\}$

Traisons un exemple simple où la géométrie de la structure est bidimensionnelle avec des efforts tridi.

Exemple : poignée de porte bloquée



Cette structure est isostatique,

6 inconnues de liaison $\{T_A\}_{0 \rightarrow S} = \{\vec{R}_A \ \vec{M}_A\}$

et 6 équations d'équilibre : $\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Q = 0 \\ Z_A - F = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} M_{Ax} - bF = 0 \\ M_{Ay} + aF = 0 \\ M_{Az} + aQ = 0 \end{cases}$

Il n'est pas utile de connaître $\{\vec{R}_A \ \vec{M}_A\}$ pour construire les diagrammes.

Nous utiliserons le sens de parcours et les bases locales définies par la figure suivante

Sur $[A, B]$ $\forall s \in [0, b]$ la facette est de normale \vec{y}_0

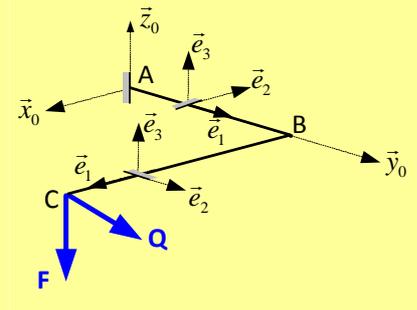
Sur $[B, C]$ $\forall s \in [0, a]$ la facette est de normale \vec{x}_0

Calculons sur la base b_0 le torseur exercé par le chargement en C sur

une facette courante située à l'abscisse s : $\vec{M}_{f(s)} = \overrightarrow{G_s C} \wedge \vec{F}_{(C)}$

$$\text{Sur AB : } \forall s \in [0, b] \quad \vec{M}_{f(s)} = \begin{matrix} a \\ b-s \\ 0 \end{matrix} \Lambda \begin{matrix} 0 \\ Q \\ -F \end{matrix} = \begin{matrix} -F(b-s) \\ aF \\ aQ \end{matrix}$$

$$\text{Sur BC : } \forall s \in [0, a] \quad \vec{M}_{f(s)} = \begin{matrix} a-s \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Lambda \begin{matrix} 0 \\ Q \\ -F \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ F(a-s) \\ Q(a-s) \end{matrix}$$



Il faut alors faire un changement de base pour passer de l'expression des torseurs sur la base b_0 à la base $b_s = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ici les changements de base peuvent se faire à vue, il n'est pas utile de passer par les matrices de passage.

$$\text{Sur AB } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \equiv (\vec{y}_0, -\vec{x}_0, \vec{z}_0) \quad \text{d'où } \forall s \in [0, b] \quad \vec{R}_{(s)} = \begin{matrix} Q \\ 0 \\ -F \end{matrix} \quad \vec{M}_{f(s)} = \begin{matrix} aF \\ F(b-s) \\ aQ \end{matrix}$$

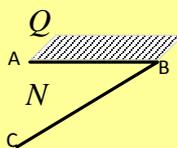
$$\text{Sur BC } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \equiv (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \quad \text{d'où } \forall s \in [0, a] \quad \vec{R}_{(s)} = \begin{matrix} 0 \\ Q \\ -F \end{matrix} \quad \vec{M}_{f(s)} = \begin{matrix} 0 \\ F(a-s) \\ Q(a-s) \end{matrix}$$

Ces résultats permettent de tracer les diagrammes des efforts intérieurs

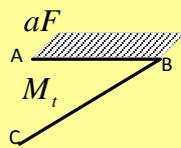
Sur AB : $N = Q$, $M_t = aF$, $M_2 = F(b-s)$; $M_3 = aQ$

Sur BC : $N = M_t = 0$, $M_2 = F(a-s)$; $M_3 = Q(a-s)$

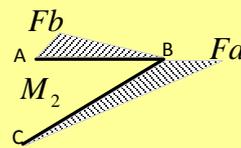
Tous ces résultats étaient prévisibles à partir de la figure.



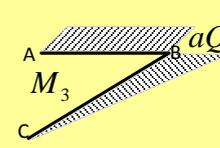
Effort normal



Moment de torsion



Flexion / \vec{e}_2



Flexion / \vec{e}_3

Ces diagrammes permettent de déterminer les contraintes maximales sur chaque élément.

Calculons le déplacement du point C, nous pourrions intégrer les lois de comportement en partant du point A ou les conditions aux limites sont connues et en écrivant les conditions de continuité au point B. Ces calculs sont longs et il est beaucoup plus rapide d'utiliser le théorème de Castigliano.

Rappelons qu'en flexion on ne tenant pas compte de l'énergie de déformation associée à l'effort tranchant (modèle de Bernoulli) l'énergie de déformation d'un portique tridimensionnel comprend 4 termes ; la traction, la torsion, et les deux flexions planes :

$$2E_d = \int_s \frac{N^2}{ES} ds + \int_s \frac{M_t^2}{GJ} ds + \int_s \frac{M_2^2}{EI_2} ds + \int_s \frac{M_3^2}{EI_3} ds \quad \text{et : } v_c = \frac{\partial E_d}{\partial Q} \quad w_c = -\frac{\partial E_d}{\partial F}$$

Il faut préciser les caractéristiques des sections des éléments AB et BC à ce niveau

Élément AB : fer rond de rayon $R \implies I_2 = I_3 = I = \pi R^4 / 4, S = \pi R^2, J = \pi R^4 / 2$

Élément BC : plat de dimensions $(2R, e) \implies S, J$ ne servent pas et $I_2 = \frac{2}{3} e R^3, I_3 = \frac{R}{6} e^3$

$$\frac{\partial E_d}{\partial F} = \frac{a^2 b}{GJ} F + \frac{F}{EI} \int_0^b (b-s)^2 ds + \frac{F}{EI_2} \int_0^a (a-s)^2 ds \implies w_C = -F \left(\frac{a^2 b}{GJ} + \frac{b^3}{3EI} + \frac{a^3}{3EI_2} \right)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial Q} = \frac{b}{ES} Q + \frac{Q}{EI} \int_0^b a^2 ds + \frac{F}{EI_3} \int_0^a (a-s)^2 ds \implies v_C = Q \left(\frac{b}{ES} + \frac{a^2 b}{EI} + \frac{a^3}{3EI_3} \right)$$

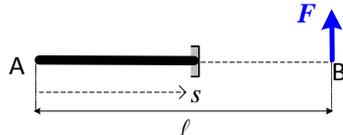
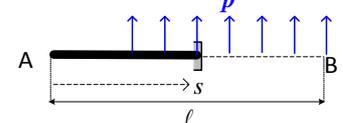
Analyse de ces résultats :

- La flèche w est due à la (torsion + flexion) de l'élément AB + flexion de BC
- La flèche v est due à la traction de AB, la rotation en B de l'élément AB et de la flexion de BC
- Les deux charges sont découplées

A faire, introduire une charge fictive X en C pour calculer le déplacement u_C

On trouve $u_C = -\frac{ab^2}{2EI} Q$

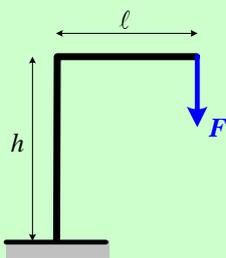
Pour les portiques isostatique la méthode sera toujours la même, il faut faire attention à l'orientation de la facette et de sa base locale.

<p>Si la charge est ponctuelle, le moment de flexion vari linéairement</p> $M_f(s) = F(\ell - s)$	
<p>Si la charge est uniforme la variation sera quadratique</p> $M_f(s) = p(\ell - s) \frac{(\ell - s)}{2} = \frac{p}{2} (\ell - s)^2$	

Si la charge varie linéairement le moment de flexion sera un polynôme cubique.

Exercice 12 : Étude d'un portique isostatique

Objectifs : *Calcul analytique "RDM" d'un portique plan isostatique.
Diagramme des efforts intérieurs calcul de la déformée.
Application de Castigliano*



1. Calculer les efforts à l'appui
2. Tracer les diagrammes de (N, T, M_f)
3. Calculer la déformée de la structure.
4. Retrouver le déplacement vertical du point d'application de la force par Castigliano

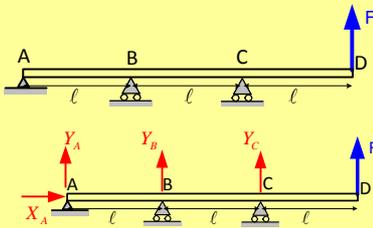
Statique des portiques hyperstatiques

Pour un portique hyperstatique il faut dans un premier temps choisir les inconnues hyperstatiques, un bon choix peut simplifier de façon significative les calculs.

Il est conseillé alors d'utiliser le théorème de Ménabréa. D'autre méthodes existent elles sont basées sur la connaissance à priori de solutions de référence que l'on trouve dans les ouvrages spécialisés sur le calcul des portiques, l'utilisation de ces résultats permet d'éviter un certain nombre de calculs. De nos jours ces

méthodes sont rendues obsolètes du fait de la méthode des éléments finis qui donne avec un minimum d'effort la réponse de la structure. Nous nous intéressons donc ici aux structures hyperstatiques simples qui permettent de comprendre la démarche et de savoir mener les calculs analytiques dans les cas élémentaires, ce qui n'est pas inutile.

Exemple : structure est hyperstatique de degré 1



4 inconnues de liaison $X_A \quad Y_A \quad Y_B \quad Y_C$

pour 3 équations d'équilibre :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A + Y_B + Y_C + F = 0 \\ \ell Y_B + 2\ell Y_C + 3\ell F = 0 \end{cases}$$

Prenons Y_C comme inconnue hyperstatique :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = 2F + Y_C \\ Y_B = -3F - 2Y_C \end{cases}$$

Exprimons le moment de flexion

Sur CD : $\forall s \in [2\ell, 3\ell] \quad M_f(s) = (3\ell - s)F$

Sur BC : $\forall s \in [\ell, 2\ell] \quad M_f(s) = (3\ell - s)F + (2\ell - s)Y_C$

Sur AB : $\forall s \in [0, \ell] \quad M_f(s) = (3\ell - s)F + (2\ell - s)Y_C + (\ell - s)(-3F - 2Y_C) = 2sF + sY_C$

Appliquons le théorème de Ménébréa : $\frac{\partial E_d}{\partial Y_C} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_3 \frac{\partial M_3}{\partial Y_C} dx = 0$

	M_3	$\partial M_3 / \partial Y_C$
$\forall s \in [0, \ell]$	$2sF + sY_C$	s
$\forall s \in [\ell, 2\ell]$	$(3\ell - s)F + (2\ell - s)Y_C$	$(2\ell - s)$
$\forall s \in [2\ell, 3\ell]$	$(3\ell - s)F$	0

D'où $\frac{\partial E_d}{\partial Y_C} = 0 \implies F \left(\int_0^\ell 2s^2 ds + \int_\ell^{2\ell} (3\ell - s)(2\ell - s) ds \right) = -Y_C \left(\int_0^\ell s^2 ds + \int_\ell^{2\ell} (2\ell - s)^2 ds \right)$

$Y_C = -\frac{3/2}{2/3} F = -\frac{9}{4} F$

Ayant il suffit de reporter dans les expressions précédentes pour obtenir le diagramme du moment de flexion et les efforts aux appuis.

Utilisons la méthode de superposition pour retrouver ce résultat et voir le lien entre Ménébréa et Castigliano

<p>$PB \Leftrightarrow PB1 + PB2$ avec $v_1(C) + v_2(C) = 0$</p> <p>Les deux problèmes 1 et 2 sont isostatiques</p> <p>Pour pouvoir calculer v_C dans le problème 1 nous introduisons une charge fictive X en C</p> <p>L'effort de liaison en B pour chaque problème est</p> <p>$\implies Y_{B1} = -2X - 3F$</p> <p>Et $Y_{B2} = -2P$</p>	
---	--

Appliquons Castigliano pour calculer les flèches en C

PB1	M3	$\partial M_3 / \partial X$
$\forall s \in [0, \ell]$	$2sF + sX$	s
$\forall s \in [\ell, 2\ell]$	$(3\ell - s)F + (2\ell - s)X$	$(2\ell - s)$
$\forall s \in [2\ell, 3\ell]$	$(3\ell - s)F$	0

$$D'où \left[\frac{\partial E_d}{\partial X} \right]_{X=0} = v_{1(C)} \implies v_{1(C)} = \frac{F}{EI} \left(\int_0^\ell 2s^2 ds + \int_\ell^{2\ell} (3\ell - s)(2\ell - s) ds \right) = \frac{3F\ell^3}{2EI}$$

PB2	M3	$\partial M_3 / \partial P$
$\forall s \in [0, \ell]$	sP	s
$\forall s \in [\ell, 2\ell]$	$(2\ell - s)P$	$(2\ell - s)$

$$D'où \frac{\partial E_d}{\partial P} = v_{2(C)} \implies v_{2(C)} = \frac{P}{EI} \left(\int_0^\ell s^2 ds + \int_\ell^{2\ell} (2\ell - s)^2 ds \right) = \frac{2P\ell^3}{3EI}$$

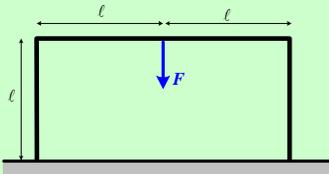
En écrivant $v_{1(C)} + v_{2(C)} = 0$ on retrouve $P = -\frac{9}{4}F$

A moins de connaître les résultats de PB1 ou PB2 la méthode est plus longue

Nous vous proposons de terminer ce chapitre par deux exercices de cours que vous devez pouvoir faire.

Exercice 13 : Étude d'un portique hyperstatique

Objectifs : Calcul d'un portique plan hyperstatique (utilisation du TH de Ménabréa).



On négligera l'énergie de déformation à l'effort normal

1. Montrer que cette structure est hyperstatique de degré 3.
2. Utiliser la symétrie pour simplifier le problème.
3. Utiliser le TH de Ménabréa pour calculer les efforts aux appuis
4. Tracer le diagramme du moment de flexion sur la structure
5. Calculer la flèche au centre.

Exercice 14 : Étude d'une poutre chargée en son centre

Objectifs : Système hyperstatique.

Calculer de la réponse statique d'une poutre encastree appuyée chargée en son centre.

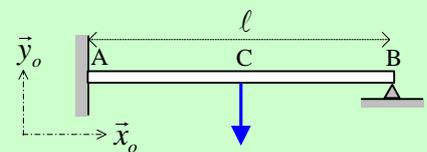
La structure est hyperstatique.

Calculer les efforts aux appuis

Tracer le diagramme des efforts intérieurs.

Calculer la déformée de la poutre

Montrer que l'on peut retrouver ces résultats en appliquant le théorème de superposition.



Votre parcours pédagogique

Pour aller plus loin vous pouvez utiliser les supports pédagogiques proposés et traiter numériquement des structures portiques plus complexes avec au choix *Cast3M* ou *MEFlab*

